

特異積分方程式を利用した円形境界からなる応力集中問題の高精度解析法(1) 切欠き問題とき裂問題

著者	松尾 忠利, 野田 尚昭
雑誌名	機械の研究
巻	51
号	5
ページ	569-576
発行年	1999-05-01
URL	http://hdl.handle.net/10228/00007868

特異積分方程式を利用しただ円形境界からなる応力集中問題の高精度解析法(1)

——切欠き問題とき裂問題——

松尾 忠利*・野田 尚昭**

1. 緒 言

機械材料中に存在する切欠きや穴、介在物などの欠陥は、材料の強度に多大な影響を及ぼし、しばしば破壊や破損の原因となる。そして、その形状は等価だ円の概念¹⁾を用いて、だ円形または半だ円形で近似できる場合が多い。また、だ円形境界の応力集中問題はその特殊な場合としてき裂形状や円形をも含むので、その高精度解析法を考察することは重要である。

一般に、これまでに提案された応力解析法として、

- (1) 応力関数を用いる方法
- (2) 変位関数を用いる方法
- (3) 有限要素法
- (4) 差分法
- (5) 境界要素法
- (6) 体積力法
- (7) 連続分布転位法

などが挙げられる。

この中で、(1)、(2)が一般に解析の方法と呼ばれているが、今日行なわれている研究ではこれらの方法においてもある程度数値解析の手法が取り入れられている場合がほとんどである。一方、(3)～(7)などの方法はすべて数値解析の手法と呼ばれており、その中でも(5)～(7)は本質的には問題を境界上の特異積分方程式で表現し、未知関数を求めることに帰着されるという点に共通性がある。このような観点から特異積分方程式を用いた高精度応力解析法を考察することは多くの応力解析において重要であると考えられる。

本稿では、だ円形境界からなる切欠きや穴、介在物などの応力集中問題を特異積分方程式を用いて高精度に解析する方法を説明する。また、特異積分方程式を用いた数値解析はき裂問題に由来多く適用されていることから、き裂問題に対する数値解析法も検討する。

2. 従来の体積力法による応力集中問題の数値解析法とその問題点

応力集中問題を特異積分方程式として定式化するため、ここでは体積力法を用いる。まず、体積力法の特異積分方程式を厳密に解析するという観点から従来の体積力法^{2,3)}の数値解析法とその問題点を整理する。体積力法による応力集中問題の解析においては、切欠きのない弾性体中の切欠きとなるべき仮想境界上に体積力を分布させ、体積力の密度を未知関数とする境界特異積分方程式を解くことに帰着される。この方程式を解析的に解く際に、境界条件を境界上のすべての点で満足させることは、ごく特別な場合を除いて一般に困難であるので、従来の体積力法では、境界上で選出された有限個の代表点(選点)においてだけ境界条件を満足させる、いわゆる選点法を用いる。すなわち、仮想境界を適当に分割し、分割した各区間内で一定値をとる階段関数によって分布密度を近似し、境界上の選点で応力境界条件を満足させるように密度の値を決定する。その際、数値解析で体積力の密度をそのまま未知数として求めると、切欠き底付近では体積力密度が不正確であることにより、応力集中係数の誤差が大きく解析精度が非常に悪い。

そこで、体積力法では、切欠きの応力集中を精度よく求めるために、体積力の分布密度を次式で定義される基本密度関数と未知の重み関数との積で表現する。

* 福島工業高等専門学校 機械工学科
(Tadatoshi Matsuo)

** 九州工業大学 工学部 機械知能工学科
(Nao-Aki Noda)

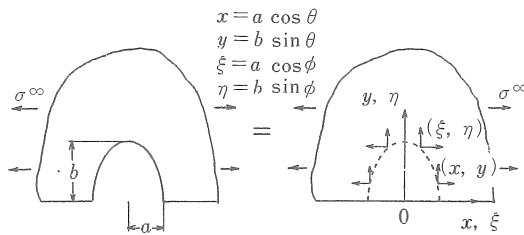


図 1 半無限板の半だ円切欠き

$$\text{体積力の密度} = \text{基本密度関数} \times \text{重み関数}$$

ここで、基本密度関数とは既知の基本的問題に対して厳密解を与える体積力密度であり、例えば図1に示す半だ円切欠き問題では、一様引張応力を受ける無限板中の半だ円孔を厳密に表現する体積力密度である。このような表現を用いることによって、数値解析で求めるのは体積力の密度そのものではなく、基本密度関数にかけべき重み関数となる。求めるべき重み関数は、体積力そのものの变化よりはるかに緩やかなので、階段関数を用いても高精度の解析が可能となり、数多くの応力集中問題の解析がなされている。

しかし一方で、従来の体積力法の問題点として、

(1) 分割数を増加しても密度が収束しない場合がある。分割数を増加しても厳密な解が得られる保証がない。

(2) 階段関数を用いるために境界上の任意の点の滑らかな応力が求められない。

(3) 境界条件の満足度などによる解析精度の検討がなされていない。

(4) 引張応力場の解析のみで、せん断応力場における解析がなされていない。

などが挙げられる⁴⁻⁶⁾。

例えば、重み関数として階段関数を用いる場合、分割区間の数を増やせば、真の密度分布への区間ごとに一定となる階段状の密度分布による近似の誤差が小さくなって、得られた計算結果の精度も高められる。しかし、階段関数の近似を用いる場合、各分割区間で体積力の密度は不連続となっているために、分割区間の数をいくら増やしても、その不連続性は常に残っていて分割された段と段の間では応力や変位の不連続が生じている。特に、最大応力の生じる位置があらかじめわからない問題

の解析においては、境界上の任意の点の応力が正確に把握できることが必要である。したがって、境界上の任意の点の応力を求める必要がある問題の解析に対して不便である。また、特異積分方程式を数値的(選点法)に解析しているため、選点の位置以外での境界条件の満足度は保証されていないので、解析精度の検討を行なうためには、境界条件の満足度を調べる必要があると考えられる。

3. 体積力法の特異積分方程式を用いた半だ円切欠きの高精度解析法

本解析法を図1に示したような遠方で一様な引張応力 σ^∞ が作用している半無限板中の半だ円切欠きを例にとって説明する。この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、半無限板中の1点 $(\xi = a \cos \phi, \eta = b \sin \phi)$ に集中力が働くときの任意の点 $(x = a \cos \theta, y = b \sin \theta)$ の応力場の解を用いて解くことができる^{2,3)}。このとき問題は、切欠きとなるべき仮想境界上に分布させた x, y 方向の体積力密度 $\rho_x(\phi)$ 、 $\rho_y(\phi)$ を未知関数とする特異積分方程式(1)で表現される $[\phi$ は着力点 (ξ, η) を表わす角度で注目点 (x, y) を表わす角度 θ と区別して用いる]。

$$\begin{aligned} & (-1/2) \{ \rho_x(\theta) \cos^2 \theta_0 + \rho_y(\theta) \sin^2 \theta_0 \} \\ & + \int_0^\pi K_{nt}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_x(\phi) b \cos \phi d\phi \\ & + \int_0^\pi K_{nt}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_y(\phi) a \sin \phi d\phi \\ & = -\sigma^\infty \cos^2 \theta_0 \end{aligned} \quad (1. a)$$

$$\begin{aligned} & (-1/2) \{ -\rho_x(\theta) + \rho_y(\theta) \} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ & + \int_0^\pi K_{nt}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_x(\phi) b \cos \phi d\phi \\ & + \int_0^\pi K_{nt}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_y(\phi) a \sin \phi d\phi \\ & = \sigma^\infty \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (1. b)$$

式(1)は仮想境界上における境界条件 $\sigma_n=0$ 、 $\tau_{nt}=0$ に相当している。式(1)の第一項は、体積力を \ominus 境界(境界内部の点で境界に無限に近い点からなる境界)に作用させたとき仮想境界上に生じる応力の項である。また、 $K_{nt}^{Fx}(\phi, \theta)$ を例にとると、これは、仮想境界上の1点に x 方向の単位大きさの集中力が作用するとき境界上の点に生じる法線

方向の応力 σ_n を意味する。式(1)の第二、第三項は、 $1/\sin\{(\theta-\phi)/2\}$ の特異性を有する項を含んでいる³⁾。そのため、 $\theta=\phi$ の場合には、積分のコーシーの主値を取るものとして、記号 \oint で示す。

特異積分方程式(1)の未知関数である $\rho_x(\phi)$ 、 $\rho_y(\phi)$ は仮想切欠きの微小要素 $ds=\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}$ に作用する力の ξ, η 方向の成分をそれぞれ dF_ξ 、 dF_η とするとき次式で定義される。

$$\rho_x(\phi) = \frac{dF_\xi}{d\eta}, \quad \rho_y(\phi) = -\frac{dF_\eta}{d\xi} \quad (2)$$

もし、体積力の密度として通常の密度の定義に用いられるように境界に沿った長さ当たりの定義 $[\rho_x^*(\phi), \rho_y^*(\phi)]$ を用いるものとするれば、特異積分方程式(1)の解法は、未知関数 $\rho_x^*(\phi)$ 、 $\rho_y^*(\phi)$ を重み関数 $\rho_x(\phi)$ 、 $\rho_y(\phi)$ と基本密度関数の積で近似して解くことに相当している。

$$\left. \begin{aligned} \rho_x^*(\phi) &= \frac{dF_\xi}{ds} = \frac{dF_\xi}{d\eta} n_x(\phi) = \rho_x(\phi) n_x(\phi) \\ \rho_y^*(\phi) &= \frac{dF_\eta}{ds} = \frac{dF_\eta}{d\eta} n_y(\phi) = \rho_y(\phi) n_y(\phi) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $n_x(\phi)$ 、 $n_y(\phi)$ は仮想境界上の点 (x, y) における単位外向き法線ベクトルの座標成分であり、次式で表現される。

$$\left. \begin{aligned} n_x(\phi) &= \frac{a \cos \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} \\ n_y(\phi) &= \frac{b \sin \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、式(3)中の $\rho_x(\phi)$ 、 $\rho_y(\phi)$ が重み関数であり、 $n_x(\phi)$ 、 $n_y(\phi)$ が基本密度関数である³⁾。

従来の体積力法では、本来連続して変化しているべき重み関数 $\rho_x(\phi)$ 、 $\rho_y(\phi)$ を、切欠きを M 等分し、分割した各区間で一定値をとる階段関数で近似している。一方、本研究では未知関数を連続関数として近似するために多項式を用いる。いま、問題の対称性より次のような表現を用いる。

$$\rho_x(\phi) = \sum_{n=1}^M a_n t_n(\phi), \quad \rho_y(\phi) = \sum_{n=1}^M b_n t_n(\phi) \quad (5)$$

$$t_n(\phi) = (\pi/2 - \phi)^{2(n-1)} \quad (6)$$

以上の離散化の方法により、式(1)の積分方程式は係数 a_n 、 b_n についての $2M$ 元の連立方程式

に還元される。

$$\sum_{n=1}^M (a_n A_n + b_n B_n) = -\frac{\pi}{2} \cos^2 \theta_0 \quad (7.a)$$

$$\sum_{n=1}^M (a_n C_n + b_n D_n) = \frac{\pi}{2} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \quad (7.b)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n &= (-1/2) t_n(\theta) \cos^2 \theta_0 \\ &\quad + \oint_0^\pi K_{nn}^{FX}(\phi, \theta) b \cos \phi t_n(\phi) d\phi \\ B_n &= (-1/2) t_n(\theta) \sin^2 \theta_0 \\ &\quad + \oint_0^\pi K_{nn}^{FY}(\phi, \theta) a \sin \phi t_n(\phi) d\phi \\ C_n &= (-1/2) t_n(\theta) \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \\ &\quad + \oint_0^\pi K_{nt}^{FX}(\phi, \theta) b \cos \phi t_n(\phi) d\phi \\ D_n &= (-1/2) t_n(\theta) \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \\ &\quad + \oint_0^\pi K_{nt}^{FY}(\phi, \theta) a \sin \phi t_n(\phi) d\phi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

任意の点の応力は係数 a_n 、 b_n と $A_n \sim D_n$ に相当する影響係数の一次結合で表わされる。

以上の解析方法により半無限板の半だ円切欠きの応力集中係数および境界上の応力分布を求める。

4. 切欠き問題の解析結果

4.1 未知関数 $[\rho_x(\phi), \rho_y(\phi)]$ の収束性

半無限板中の半だ円切欠きの形状比が³⁾、 $b/a=1, 2$ の場合の未知関数の密度変化を図2に示す。図2は、本解析結果の選点数および階段関数を用いた体積力法の解析結果²⁾の分割数がともに $M=12, 24$ の場合の結果を示している。多項式近似を用いた本解析法では、選点数 $M=12$ 程度で密度はほとんど収束してしまい、連続関数である分布密度をよく近似している。一方、階段関数を用いたときは、特に自由縁近くで急な密度変化をうまく表現できずに本解析結果との間に差が生じている。

4.2 応力集中係数の収束性

応力集中係数の値の収束状況を階段関数を用いた体積力法の解析結果とともに表1に示す。ここで、体積力の密度変化が大きいことを考慮して $0^\circ \leq \theta \leq 10^\circ$ での選点数を $M1$ 、 $10^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ での選点数を $M2$ としている。したがって、 M は区間 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の総選点数 $(M1+M2)$ である。表1に

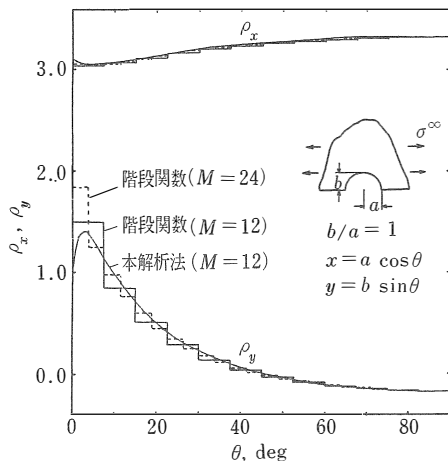
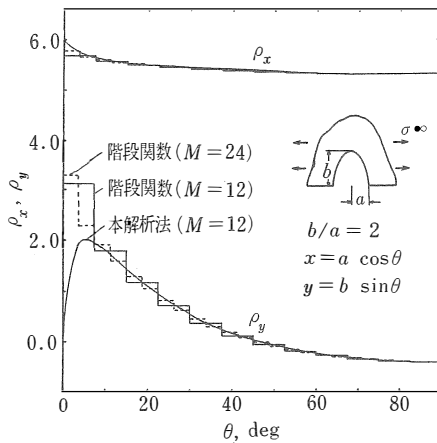
(a) $b/a = 1$ (b) $b/a = 2$

図2 未知関数の収束性の比較

おける階段関数を用いた体積法での応力集中係数の外挿値($M=\infty$)は、分割数 $M=48, 32$ における解析結果によるものである。本解析による応力集中係数の値は、 $M=14$ で有効数字 5 桁まで陳らの解析結果⁷⁾と一致している。これは外挿を必要とする従来の体積法の解析例よりも良好な収束性を示している。

4.3 境界条件 ($\sigma_r=0$, $\tau_{r\theta}=0$) の満足度

境界条件 ($\sigma_r=0$, $\tau_{r\theta}=0$) の満足度を確認するために、半円切欠き ($b/a=1$) の円孔縁において、選点と選点の midpoint での応力 σ_θ , σ_r , $\tau_{r\theta}$ の分布を表 2 に示す。このとき $M1=4$, $M2=8$ で総選点数 $M=12$ である。境界上で 0 であるべき σ_r , $\tau_{r\theta}$ の値

表1 応力集中係数の収束性

(a) $b/a = 1$

本解析法		従来の体積法	
M	K_t	M	K_t
4	3.056586	8	3.052064
6	3.061805	12	3.056805
8	3.064102	24	3.061290
10	3.064920	32	3.062307
12	3.065215	48	3.063353
14	3.065321	∞ (48-32)	3.0654
		文献 7)	3.0653

(b) $b/a = 2$

本解析法		従来の体積法	
M	K_t	M	K_t
4	5.199307	8	5.178407
6	5.213694	12	5.193873
8	5.218326	24	5.207968
10	5.219638	32	5.211044
12	5.220068	48	5.214306
14	5.220230	∞ (48-32)	5.2208
		文献 7)	5.2204

(c) $b/a = 10$

本解析法		従来の体積法	
M	K_t	M	K_t
4	22.90348	8	22.50020
6	23.02375	12	22.64869
8	23.00240	24	22.81734
10	22.99309	32	22.85534
12	22.99903	48	22.90320
14	23.00849	∞ (48-32)	22.999
		文献 7)	23.000

表2 切欠き境界上の応力分布

(b/a=1, M1=4, M2=8)

θ , deg	σ_θ	σ_r	$\tau_{r\theta}$
1.	-0.0012	4.2×10^{-4}	-4.0×10^{-4}
3.	-0.0108	3.0×10^{-5}	4.0×10^{-5}
5.	-0.0266	-1.0×10^{-5}	-1.0×10^{-5}
7.	-0.0398	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}
13.5	-0.0326	-2.5×10^{-4}	-3.7×10^{-4}
23.4	0.1814	1.2×10^{-4}	1.5×10^{-4}
32.3	0.5499	-6.0×10^{-5}	-6.0×10^{-5}
41.2	1.0332	3.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}
50.0	1.5621	-2.0×10^{-5}	0.0
58.9	2.0854	1.0×10^{-5}	0.0
67.8	2.5376	-1.0×10^{-5}	0.0
76.7	2.8689	2.0×10^{-5}	0.0

選点の角度 (deg) は、2., 4., 6., 8., 18.9, 27.8, 36.7, 45.6, 54.4, 63.3, 72.2, 81.1 である。

は、 $M=12$ 程度でも 10^{-3} 以下であり高い境界条件の満足度が確認される。

5. 特異積分方程式を用いた き裂問題の解析法

き裂問題の解析に古くから用いられている連続分布転位法による解析においても、問題は3節で考察した特異積分方程式と同じ特異性の次数($1/r$)を持つ特異積分方程式で定式化される。したがって、前述の解析法がき裂問題の解析においても有効であると考えられる。ここでは、半無限板の長さ a の縁き裂の問題を例にとって数値解析方法を考察する⁸⁻¹²⁾。弾性体の縁に長さ a の平面ひずみ状態の縁き裂が存在するとき、問題は、き裂のない弾性体の仮想き裂面上に分布させた転位密度 $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ を未知関数とする次のような特異積分方程式で表現される。ここで、 $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ はそれぞれき裂面に対して垂直および接線方向のバーガースベクトルを持つ転位密度である。

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{P_1(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_0^a K_{11}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ + \int_0^a K_{12}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} p(x) \end{aligned} \quad (9. a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{P_2(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_0^a K_{21}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ + \int_0^a K_{22}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} q(x) \end{aligned} \quad (9. b)$$

(G : 横弾性係数, $\kappa=3-4\nu$, ν : ポアソン比)
ここで、 \int は積分のコーシーの主値を取ることを意味していて、 $K_{ij}(\xi, x)$ ($i, j=1, 2$) は直線縁の影響を補正する関数であり、 $p(x)$, $q(x)$ は、仮想き裂面上で打ち消すべき表面力である。積分区間が $[0, 1]$ になるように、変数 ξ, x を次の r, s を用いて変換する。

$$\begin{aligned} r = \frac{\xi}{a}, \quad s = \frac{x}{a}, \quad f_i(r) = \frac{P_i(\xi)}{a} \\ (i=1, 2) \end{aligned} \quad (10)$$

r, s を用いれば、式(8)は次式のように変形できる。

$$\int_0^1 \frac{f_1(r)}{r-s} dr + \int_0^1 k_{11}(r, s) f_1(r) dr$$

$$+ \int_0^1 k_{12}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} p(s) \quad (11. a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f_2(r)}{r-s} dr + \int_0^1 k_{21}(r, s) f_1(r) dr \\ + \int_0^1 k_{22}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} q(s) \end{aligned} \quad (11. b)$$

さらに、式(14)の積分公式が使えるように式(11)を式(12)のように変形する。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f_1(r)}{r-s} dr - \int_{-1}^0 \frac{f_1(r)}{r-s} dr \\ + \int_0^1 k_{11}(r, s) f_1(r) dr \\ + \int_0^1 k_{12}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} p(s) \end{aligned} \quad (12. a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f_2(r)}{r-s} dr - \int_{-1}^0 \frac{f_2(r)}{r-s} dr \\ + \int_0^1 k_{21}(r, s) f_1(r) dr \\ + \int_0^1 k_{22}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} q(s) \end{aligned} \quad (12. b)$$

式(12)の解法として、未知関数 $f_i(r)$ ($i=1, 2$) を式(13)のように基本転位密度関数 $w_i(r)$ ($i=1, 2$) と Chebychev 多項式 $T_n(r)$ の積で近似する。

$$\left. \begin{aligned} w_i(r) &= \frac{1+\kappa}{2G\sqrt{1-r^2}} \quad (i=1, 2) \\ f_1(r) &= w_1(r) F_1(r), \quad F_1(r) = \sum_{n=1}^M a_n T_n(r) \\ f_2(r) &= w_2(r) F_2(r), \quad F_2(r) = \sum_{n=1}^M b_n T_n(r) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

特異性を含む式(12)の第一項は式(14)を利用する。

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(r)}{(r-s)\sqrt{1-r^2}} dr = \pi U_{n-1}(s) \quad (14)$$

ここで、 $T_n(r)$, $U_n(r)$ は、それぞれ、第一、二種の Chebychev の多項式であり、次式で定義される。

$$\begin{aligned} T_n(r) &= \cos(n\theta), \\ U_{n-1}(r) &= \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}, \quad r = \cos\theta \end{aligned} \quad (15)$$

以上のような離散化の方法によって、式(12)の

積分方程式は、式(16)の $2M$ 元の連立方程式になり、問題は、係数 a_n, b_n を解くことに還元される。

$$\sum_{n=1}^M [a_n \{\pi U_{n-1}(s) + A_n(s)\} + b_n B_n(s)] = -\pi p(s) \quad (16. a)$$

$$\sum_{n=1}^M [a_n C_n(s) + b_n \{\pi U_{n-1}(s) + D_n(s)\}] = -\pi q(s) \quad (16. b)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n(s) &= \int_{-1}^1 k_{11}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ B_n(s) &= \int_{-1}^1 k_{12}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ C_n(s) &= \int_{-1}^1 k_{21}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ D_n(s) &= \int_{-1}^1 k_{22}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

境界条件を満たす点は次式で与えられる。

$$s = \cos\left(\frac{2j}{2M+1} \frac{\pi}{2}\right), \quad j=1, 2, \dots, M \quad (s < 1) \quad (18)$$

き裂先端の応力拡大係数は次式で定義される。

$$K_I = F_I(1) \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = F_{II}(1) \sqrt{\pi a} \quad (19)$$

本報では、上述の方法を用いて半無限板の内部き裂と半無限板の縁き裂の問題を解析し、他の結果との比較を行なう。

6. き裂問題の解析結果

6.1 半無限板の内部き裂

図3に示すような半無限板の表面に近いところに表面に垂直に長さ $2a$ のき裂が存在し、遠方で一様引張応力 σ を受けるような問題を考える。この問題の特異積分方程式は次式で与えられる。

$$\int_{d-a}^{d+a} \frac{P(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_{d-a}^{d+a} \frac{x^2+4\xi x-\xi^2}{(\xi+x)^3} P(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} \sigma \quad (20)$$

式(20)を上述の方法で解析し、得られた半無限板の内部き裂の無次元化応力拡大係数の値の収束状況を数値積分公式を用いた藤本の論文¹³⁾の値とともに表3に示す。ここで、 M は $-a \leq x \leq a$ の範囲の選点数である。本解析による応力拡大係数の値の収束性は、藤本の論文と比べて若干悪くやや多くの選点数を必要としている。しかし、選点数

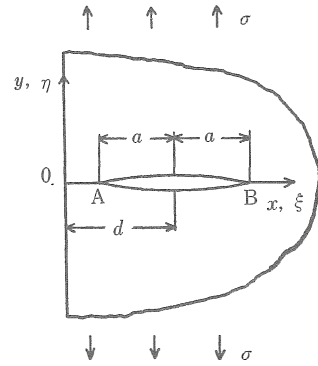


図3 半無限板の内部き裂

表3 無次元化応力拡大係数(図3 [$K_I / (\sigma \sqrt{\pi a})$])

(a) $a/d=0.5$

M/2	本解析法		文献13)	
	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$
1	1.089895	1.051646	1.094767	1.054415
2	1.091654	1.053985	1.091304	1.053898
3	1.091332	1.053914	1.091304	1.053904
4	1.091305	1.053904	1.091304	1.053904
5	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
6	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
7	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
8	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
9	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
10	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904

(b) $a/d=0.9$

M/2	本解析法		文献13)	
	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$
1	1.553727	1.153680	2.069667	1.300961
2	1.745955	1.198726	1.742502	1.202468
3	1.738335	1.204325	1.708220	1.203254
4	1.721242	1.204419	1.707451	1.203730
5	1.712807	1.204100	1.707622	1.203791
6	1.709469	1.203918	1.707653	1.203797
7	1.708266	1.203841	1.707656	1.203797
8	1.707855	1.203812	1.707656	1.203798
9	1.707720	1.203802	1.707656	1.203798
10	1.707676	1.203799	1.707656	1.203798
11	1.707662	1.203798		
12	1.707658	1.203798		
13	1.707656	1.203798		
14	1.707656	1.203798		

を増やすことによって両者の値は有効数字7桁まで完全に一致する。

6.2 半無限板の縁き裂

図4に示すような半無限板の縁に垂直に長さ a のき裂が存在し、遠方で一様引張応力 σ を受ける問題を考える。この問題の特異積分方程式は次式

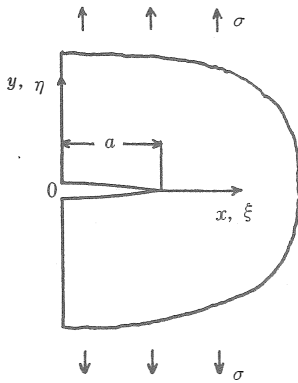


図 4 半無限板の縁き裂

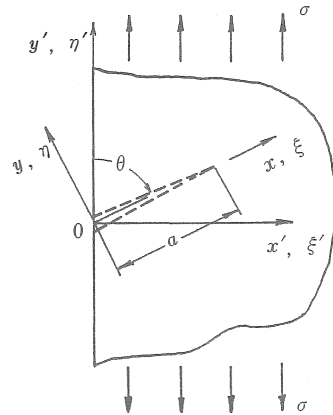


図 5 半無限板の斜め縁き裂

表 4 無次元化応力拡大係数 (図 4 [$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$])

M	本解析法	文献 14)		文献 15)
		手法 A	手法 B	
10	1.121853	1.12379	1.11801	1.1194
20	1.121537	1.12212	1.12054	1.1209
30	1.121524	1.12182	1.12103	1.113
40	1.121521	1.12167	1.12147	1.1214
50	1.121521	1.12148	1.12121	1.1214
文献 16, 17)	1.121522			

で表わされる。

$$\int_0^a \frac{P(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_0^a \frac{x^2 + 4\xi x - \xi^2}{(\xi+x)^3} P(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} \sigma \quad (21)$$

式(21)を上述の方法で解析し得られた、半無限板の縁き裂の無次元化応力拡大係数の値の収束状況を、Boi ko らの論文^{14,15)}の値とともに表 4 に示す。ここで、 M は $0 \leq x \leq a$ の範囲の選点数である。縁き裂の問題では、他の研究者らの結果は、内部き裂の問題と比べて収束性が悪く、多くの選点数を必要としている。しかし、本解析による結果は、 $M=30$ 程度で有効数字 7 桁程度まで Koi ter の厳密解^{16,17)}と一致する。また、この結果は文献 11) の結果とほぼ同程度の精度である。

6.3 半無限板の斜め縁き裂

図 5 のように半無限板の直線縁に斜めに長さ a のき裂が存在し、遠方で一様引張応力 σ を受ける問題を考える。この問題の特異積分方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \frac{2G}{\pi(\kappa+1)} \int_0^a \frac{P_1(\xi)}{\xi-x} d\xi \\ & + \int_0^a K_{11}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ & + \int_0^a K_{12}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -p(x) \quad (22. a) \\ & \frac{2G}{\pi(\kappa+1)} \int_0^a \frac{P_2(\xi)}{\xi-x} d\xi \\ & + \int_0^a K_{21}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ & + \int_0^a K_{22}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -q(x) \quad (22. b) \end{aligned}$$

表 5 無次元化応力拡大係数
(図 5 [$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$, $K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$])

θ , deg	M	本解析法		文献 11)	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
45.	5	0.70403	0.36557	0.70403	0.36557
	10	0.70500	0.36455	0.70449	0.36455
	15	0.70488	0.36446	0.70488	0.36446
	20	0.70489	0.36448	0.70489	0.36447
	25	0.70490	0.36448	0.70490	0.36448
30.	10	0.46256	0.35388	0.46260	0.33590
	15	0.46254	0.33620	0.46257	0.33620
	20	0.46252	0.33619	0.46254	0.33619
	24	0.46250	0.33617	0.46250	0.33617
	30	0.46247	0.33616	0.46247	0.33606
15.	20	0.23197	0.22618	0.23225	0.22637
	25	0.23180	0.22616	0.23184	0.22617
	30	0.23188	0.22621	0.23182	0.22616
	35	0.23180	0.22614	0.23181	0.22615
	40	0.23174	0.22616	0.23180	0.22614
10.	30	0.18916	0.18916	0.16125	0.17333
	35	0.16108	0.17408	0.16207	0.17347
	40	0.16236	0.17337	0.16206	0.17346
	45	0.16782	0.17054	0.16205	0.17345
	50	0.16155	0.17428	0.16205	0.17345

この問題は、先に転位よりも特異性の次数の大きい食違いまたは、集中力対の密度を未知関数とする超越特異積分方程式法によって解析がなされている¹¹⁾。この場合、未知関数である集中力対の密度を基本密度関数と Chebychev 多項式の積で近似して同様に解析している。

式(22)を上述の方法で解析し得られた半無限板の斜め縁き裂の無次元化応力拡大係数の値の収束状況を、超越特異積分方程式法による解析結果¹¹⁾とともに表5に示す。ここで、 M は $0 \leq x \leq a$ の範囲の選点数である。本解析結果と超越特異積分方程式法による解析結果を比較すると、 $\theta = 10^\circ$ の場合には積分方程式の形の違いによって結果に差が生じている。しかし、 $\theta \geq 10^\circ$ では両者はほぼ等しい精度が得られている。

7. 結 言

本報では応力集中問題を特異積分方程式を用いて高精度に解析する方法を説明した。未知関数である体積力密度を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いると、未知関数は連続関数として近似されることになる。また、き裂の解析に古くから用いられている連続分布転位法の特異積分方程式の解析においても、問題は特異積分方程式で表現できることから、未知関数である転位密度を基本転位密度関数と多項式の積で近似する方法を用いて解析を行なった。結果をまとめると以下のようなになる。

(1) 半無限板中の半だ円切欠きの応力集中係数の解析行なった結果、多項式を用いて近似する本解析法は、階段関数を用いて近似する従来の体積力法よりも良好な収束性が得られた。また、境界上の応力分布が容易に求められたほか、高い境界条件の満足度が確かめられた。

(2) 内部き裂の問題として、半無限板中の内部き裂を解析した結果を過去の解析結果と比較すると本解析結果の収束性はやや悪い。しかし、選点数を増すことにより同程度の精度を得ることができた。縁き裂の問題として、半無限板の縁き裂の問題を解析した結果、過去の解析で良好な収束性の得られていない自由縁に直角なき裂の問題は、

Koiter の厳密解と有効数字 7 桁程度まで一致した。また、半無限板の斜め縁き裂の解析結果は超越特異積分方程式法の解析結果とほぼ同程度の精度が得られた。

(3) 特異積分方程式を用いた応力解析において未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する本解析法は、応力集中問題およびき裂問題の解析において、高精度の結果を与える有効な解析法であることが具体的問題を通して示された。

参 考 文 献

- 1) 村上敬宣：弾性力学，養賢堂 (1992) p. 57.
- 2) 西谷弘信：日本機械学会誌，70，580 (1967) p. 627.
- 3) 西谷弘信・陳 玳珩：体積力法(重ね合せの原理による数値解析法)，培風館 (1987)
- 4) 野田尚昭・松尾忠利：日本機械学会論文集(A編)，58，555 (1992) p. 2179.
- 5) 野田尚昭・松尾忠利：日本機械学会論文集(A編)，59，559 (1993) p. 785.
- 6) 野田尚昭・有田卓二・松尾忠利：日本機械学会論文集(A編)，63，614 (1997) p. 2155.
- 7) 陳 玳珩・西谷弘信・森 和也：日本機械学会論文集(A編)，55，512 (1989) p. 948.
- 8) F. Erdogan, G.D. Gupta and T.S. Cook : Numerical Solution of Singular Integral Equations, in Mechanics of Fracture, Vol.1 : Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, ed. Sih, G.C., Noordhoff, Leyden (1973) p. 368.
- 9) F. Erdogan and G.D. Gupta : Quarterly of Applied Mathematics 30 (1972) p. 525.
- 10) 野田尚昭・梅本英雄・F. Erdogan : 日本機械学会論文集(A編)，55，520 (1989) p. 2521.
- 11) 野田尚昭・小田和広・陳 玳珩：日本機械学会論文集(A編)，56，532 (1990) p. 2405.
- 12) 野田尚昭・松尾忠利：日本機械学会論文集(A編)，57，543 (1991) p. 2811.
- 13) 藤本浩司：日本機械学会論文集(A編)，56，527 (1990) p. 1505.
- 14) A. Boiko and L.N. Kerpenko : International Journal of Fracture, 17, 4 (1977) p. 381.
- 15) L.M. Kerpenko : Seriya matematiki ta mehaniki(in Ukrainian), 13 (1971) p. 74.
- 16) W.T. Koiter : Discussion of "Rectangular tensile sheet with symmetrical edge cracks", by Bowie, O.L., Journal of Applied Mechanics 32, Transaction of ASME 87, Series E (1965) p. 237.
- 17) A.C. Kaya and F. Erdogan : Quarterly of Applied Mathematics, 45, 1 (1977) p. 105.

(次号へつづく)